

文章编号: 1000-8055(2003) 01-0101-08

粉末合金(FGH95)蠕变/疲劳交互作用下 寿命预测的损伤力学有限元分析

刘相新^{1,2}, 张学仁¹, 阎晓军¹, 聂景旭¹

(1. 北京航空航天大学 动力系, 北京 100083;

2. 中国运载火箭技术研究院 航天发射技术研究所, 北京 100076)

摘要: 采用基于损伤力学的蠕变—疲劳交互作用下的寿命预测模型, 应用损伤等效应力进行三维应力状态下的损伤计算, 并考虑了压缩时闭合效应, 利用 ANSYS 的二次开发工具 APDL 和 UPFs 开发程序, 把基于损伤力学的寿命预测方法与 ANSYS 的结构分析结合起来, 实现了对构件的损伤计算和寿命预测。针对粉末合金材料易含夹杂等初始缺陷的特点, 提出了在寿命计算中通过单元初始损伤模拟初始缺陷对寿命影响的处理方法, 探讨了考虑初始缺陷条件下的寿命预测, 并利用试验对计算结果进行了对比验证。

关键词: 航空、航天推进系统; 粉末合金; 蠕变; 疲劳; 寿命预测; 损伤力学

中图分类号: V 231. 95

文献标识码: A

The Finite Element Analysis of HLCF Life Prediction for PM FGH95 Based on Damage Mechanics

LIU Xiang-xin^{1,2}, ZHANG Xue-ren¹, YAN Xiao-jun¹, NIE Jing-xu¹

(1. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;

2. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: In this paper, based on the theory of damage mechanics, using damage equivalent stress to calculate the damage under 3-D stress status and taking the close-effect into account, a subroutine to calculate damage and predict fatigue life on ANSYS platform was developed by APDL and UPFs of ANSYS. The initiation and growth of cracks are simulated by damage developing. The effect of damage on material properties has been taken into considerations by two ways, one is the method of stiffness matrix modification, the other is the effective stress method. The comparison between fatigue test and calculation results indicates that this method is right and feasible, and high accuracy can be obtained when there are no initial defects in PM components. Concerning components with initial defects, a method to simplify the initial defects by means of initial damage was put forward, and was used to evaluate the life of a specimen with initial defects. The method developed in this paper can be used to predict the life of PM components accurately as long as its initial damage has been obtained in relation to its initial status exactly. If the distribution probability of initial damage is known, the reliability design and evaluation of PM components can be carried out by this method.

收稿日期: 2002- 01- 09; 修订日期: 2002- 05- 15

基金项目: 航空科学基金资助项目(98C51063)

作者简介: 刘相新(1975-), 男, 山东临朐人, 北京航空航天大学动力系硕士生, 现在中国运载火箭技术研究院航天发射技术研究
所工作, 主要从事运载火箭发射技术、结构强度、高温疲劳等方面的研究。

Key words: aerospace propulsion; powder metallurgy; creep; fatigue; damage mechanics

1 概 述

损伤力学是通过力学变量研究材料在载荷的作用下其性能退化的机理^[1]。相对于传统的寿命曲线方法,用损伤力学预测寿命可以考虑损伤的渐进过程,并综合考虑疲劳、蠕变等的影响,从而提高寿命预测的精度。近 20 年来损伤力学得到了较快的发展,先后建立起了适用于不同情况的损伤模型,这都为采用损伤力学的方法进行寿命预测提供了条件。为了向工程应用推广,国内外学者积极寻求其与近代计算技术相结合的途径^[2]。但目前结构分析所用的有限元程序还不能实现在计算中考虑损伤效应。粉末合金 FGH95 是主要应用在航空发动机的高温零部件特别是涡轮盘上的一种新材料。涡轮盘在工作在高温环境下,随着飞机的每一次起降是一个复杂的低周疲劳过程,因此蠕变—疲劳的作用是造成粉末合金盘破坏的重要原因,预测蠕变—疲劳交互作用下粉末合金盘的寿命具有重要的意义^[3]。粉末合金材料在生产过程中极易产生夹杂、孔洞等缺陷,这些缺陷会对粉末合金件的寿命产生很大影响^[4],进行寿命预测时必须加以考虑。本文中研究如何把基于损伤力学的寿命预测方法与有限元计算相结合,并用该方法实现对粉末合金材料 FGH95 蠕变—疲劳交互作用下的寿命预测。

2 蠕变—疲劳交互作用下寿命预测的损伤力学模型

对于应力控制下的蠕变—疲劳交互作用,蠕变损伤计算可采用 Lemaitre-Chaboche 非线性修正模型:

$$\frac{dD_c}{dt} = \left[\frac{\sigma}{A} \right]^r (1 - D_c)^{-k} \tag{1}$$

其中: D_c 为蠕变损伤, k 与蠕变应力 σ 有关

$k = a_0 + a_1(\sigma - z) + a_2(\sigma - z)^2$
 r, A, a_0, a_1, a_2 和 z 为材料参数,可通过拟合材料的蠕变试验数据得到。

疲劳损伤的计算可选用 Chaboche 疲劳损伤模型:

$$\frac{dD_F}{dN} = [1 - (1 - D_F)^{\beta+1}]^\alpha \cdot \left[\frac{S_a}{M(1 - D_F)} \right]^\beta \tag{2}$$

其中, D_F 为疲劳损伤

$S_a = 0.5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / \sigma$
 α 和 M 是与材料及加载状态有关的函数:

$$M = M_0(1 - bS)$$

$$1 - \alpha = a \left[\frac{S_m - S_{ml}}{1 - S_m} \right]$$

M_0, a, b 和 β 为材料常数

$$S = 0.5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / \sigma_b$$

$$S_m = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

$$S_{ml} = S_a(1 + bS)$$

S_a 为材料对称加载疲劳强度与静拉伸强度 σ_b 之比。

计算蠕变和疲劳的交互作用下的损伤,最常用的是采用叠加规律,即在累积损伤计算中,将交互作用下的损伤增量表示为两种损伤增量的线性迭加。设交互作用下损伤为 D ,则以损伤增量形式表达损伤的本构方程为:

$$dD = dD_c + dD_F = f_c dt + f_F dN \tag{3}$$

$$f_c = f_c(\sigma, D) = \left[\frac{\sigma}{A} \right]^r (1 - D)^{-k} \tag{4}$$

$$f_F = f_F(\sigma, D) = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^\alpha \cdot \left[\frac{S_a}{M(S)(1 - D)} \right]^\beta \tag{5}$$

表 1 550℃时 FGH95 蠕变和疲劳损伤材料参数

Table 1 Damage Parameters of 95 Under 550℃

参数	R	A	A_0	a_1	a_2	z
值	17.17	1923	19.1589	1.4299×10^{-3}	-1.891×10^{-4}	1210
参数	b	β	α	M_0	A	
值	0.00116	16.55	0.965	0.968	0.037	

计算损伤增量时通过代入已有总损伤 实现了损伤的非线性累积。按照载荷循环, 根据(3) 式累积计算损伤, 直到损伤达到临界损伤(对大部分材料来说, 并不是损伤为 1 时破坏, 而是在此之前, 损伤达到某一定值时, 材料将很快发生破坏, 把这个损伤值称为材料的临界损伤, 一般在 0.3 左右^[1]) 则构件破坏, 对应的循环数即为构件的寿命。

从文献[5] 中可得到 FGH95 材料的力学性能参数。根据文献[2] 中的方法, 通过处理 FGH95 材料在 550℃ 的试验数据可得到 FGH95 损伤参数(如表 1)。通过对 FGH95 的蠕变和疲劳损伤演化分析(按(1), (2) 式) 发现, 损伤在达到 0.3 左右后增长极快, 所以参照一般材料, 可取其临界损伤为 0.3。

3 损伤计算与有限元计算的结合和实现

对于复杂的构件, 由于各部分的应力状况大不相同, 不同的应力导致的损伤不同, 需要利用有限元法进行损伤场的计算, 即计算各个单元的损伤, 用单元的损伤过程模拟构件的破坏过程, 发生第一个单元破坏时的寿命即为构件的裂纹起裂寿命, 从第一个单元破坏到构件完全破坏(根据单元破坏情况判断) 的寿命为裂纹的扩展寿命。

单元损伤通过累积每次循环的损伤增量得到。单元经过一次循环后的损伤增量为疲劳损伤增量和蠕变损伤增量的叠加(式 3), 由损伤演化公式可知, 单元第 N 个循环的损伤增量与单元前 $N-1$ 个循环形成的损伤(用 D_{N-1} 表示) 情况有关: 用 D_{N-1} 代替式(4) (5) 中的 D , 按式(4) 用数值积分的方法求解第 N 个循环造成的蠕变损伤增量 ΔD_N^C , 按式(5) 求解第 N 个循环的疲劳损伤增量 ΔD_N^F , 所以 N 个循环后单元的累积损伤为:

$$D_N = D_{N-1} + \Delta D_N^C + \Delta D_N^F \quad (6)$$

$N=0$ 时单元的初始损伤为 D_0 , 其值由构件的初始状况决定。

由于单元处在复杂应力状态下, 损伤场与应力应变场之间也存在相互影响, 在计算损伤时还必须考虑以下两个问题:

(1) 计算单元损伤的损伤等效应力

前述的损伤计算公式都是在一维拉伸下推导出来的, 在用于计算单元损伤时, 由于单元处于三维应力状态, 根据 Lemaitre 指出的: “采用损伤等

效应力可以用与单向应力状态相同的方法计算三维应力状态下构件的损伤^[1]。”必须根据单元的应力状态得到单元的损伤等效应力以计算单元的损伤。Lemaitre 根据热力学基本定律提出了损伤等效应力的三维应力模型^[6]:

$$\alpha_{\text{leq}} = \bar{\sigma} \frac{2}{3} (1 + \mu) + (1 - 2\mu) \left(\frac{\sigma_H}{\bar{\sigma}} \right)^2 \quad (7)$$

式中: $\bar{\sigma}$ 为 Von Mises 等效应力; σ_H 为静水压力; μ 为泊松比。

在拉压循环中, 压缩时由于存在裂纹的闭合效应, 对损伤演化影响与拉伸时是不同的, 这时要根据单元的拉压状态修正由式(7) 得到损伤等效应力^[1]:

对拉伸

$$\alpha_{\text{leq}}^* = \sigma_{\text{leq}} \quad (8)$$

对压缩

$$\sigma_{\text{leq}}^* = - \left[\frac{1-D}{1-hD} \right]^{1/2} \sigma_{\text{leq}} = \quad (9)$$

式中: α_{leq} 为按式(7) 计算得到的损伤等效应力, σ_{leq}^* 为修正后的损伤等效应力, h 为常数, 根据试验结果, 一般可取 $h=0.2$ ^[1]。

(2) 损伤场对应力场的影响

损伤是根据载荷循环过程中的应力状态计算的, 同时已存在的损伤也会对当前的应力场产生影响。单元破坏后, 可通过去掉该单元, 即改变几何模型, 并重新计算应力应变场以施加这一影响。 $N-1$ 次循环后, 在单元已发生损伤 D_{N-1} 但未破坏前, 其材料的弹性模量下降为:

$$E_N = E_0 (1 - D_{N-1})$$

E_0 为无损伤时的弹性模量, 由于单元刚度矩阵 $[K]$ 与弹性模量成正比^[7], 所以这一影响可以通过在第 N 次加载求解时修改发生损伤的单元的刚度矩阵实现:

$$[K]_N = (1 - D_{N-1}) [K]_0 \quad (10)$$

$[K]_N$ 为修改后的单元刚度矩阵, $[K]_0$ 为无损伤时的单元刚度矩阵, 称此方法为修改刚度法。

修改刚度法要对发生损伤的单元进行一一处理, 每一次循环都要重新求解构件的应力应变场, 这在模型大、寿命长情况下非常耗时, 为此在计算时设定一个步长变量 N_{Step} , 每经过 N_{Step} 个循环才重新计算构件应力场。开始时损伤很小, 变化也慢, 所以 N_{Step} 的值可设的较大, 随着损伤的增大逐步递减 N_{Step} 的值直到 $N_{\text{Step}}=1$ 为止, 此后每次

循环都要进行构件应力场的计算。

即使采用步长控制,修改刚度法的计算耗时仍然非常长,而且,现有的一些有限元程序也没有提供修改单元刚度矩阵的接口,因此需要进一步简化计算。根据损伤力学的应变等价原理,提出在计算时采用有效应力,即:只在开始时计算一次构件应力场,每次循环读取的都是该次计算的单元应力状态,但要把得到的单元损伤等效应力按单元当前的累计损伤修正为有效应力,用于计算单元该次循环的损伤增量,如经过 $N-1$ 次循环,单元发生损伤 D_{N-1} 后,计算单元第 N 次循环的损伤增量时,用按下式得到的有效应力 $\tilde{\sigma}_{\text{deq}}$ 替代按式 (8) 和 (9) 得到的损伤等效应力计算单元的损伤增量:

$$\tilde{\sigma}_{\text{deq}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\text{deq}}}{1 - D_{N-1}}$$

(11)

其中: $\tilde{\sigma}_{\text{deq}}$ 为按式 (8) 和 (9) 得到的单元损伤等效应力。这样每一次循环用于损伤计算的单元的应力值都随着单元的累计损伤而改变,反映了已有损伤对应力场的影响。经过简化后,计算过程中,只是在发生单元破坏后才重新计算构件的应力场,计算时间大大缩短。称此方法为有效应力法。这种简化是否正确可行,在后面进行了验证。

前述的损伤计算方法,在有限元软件 ANSYS 中利用 APDL 语言和 UPFs 子程序得到实现。APDL (ANSYS Parametric Design Language) 主要面向具有一定编程技巧并且希望用 ANSYS 变量设计语言进行开发的用户,可以用它执行各种任务,甚至进行参数化建模^[8]。在本文中,参数的输入、循环加载、损伤的计算、损伤场的云图显示和列表等都是应用 APDL 编写宏程序实现的。UPFs (User Programmable Features) 是 ANSYS 提供的一系列 FORTRAN 函数和例程,用以让用户按自己的要求扩展或修改程序的功能^[8]。其中的 UELMATX.F 例程提供了修改单元刚度矩阵的接口,在修改刚度法的计算中,根据单元的损伤情况,在该程序中修改单元的刚度。该例程会在每次加载求解时自动调用。

应用修改刚度法进行寿命预测的程序框图如图 1 所示。采用有效应力法时略有不同,如没有单元刚度修改模块、损伤等效应力要按式 (11) 修正等。在求解不同问题时只需按具体问题修改循环加载模块。

4 试验与验证

4.1 试验

为了验证这一寿命预测方法对粉末合金材料的适用性,采用粉末合金 FGH95 制成的圆棒试

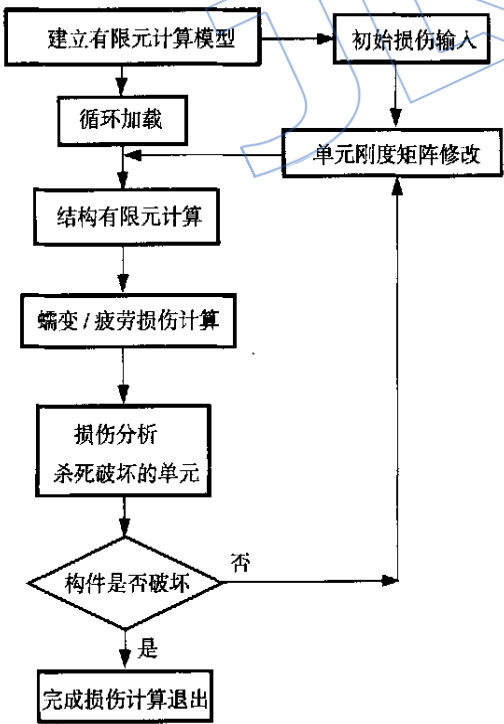


图 1 修改刚度法程序框图

Fig. 1 Method modifying stiffness matrix

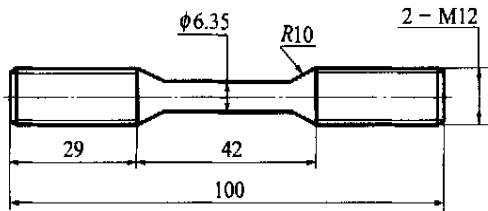


图 2 试件规格图

Fig. 2 Size of the specimen

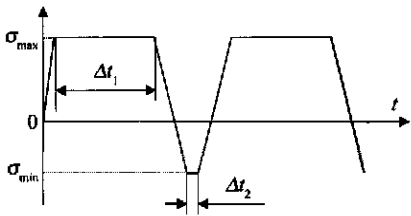


图 3 载荷循环曲线

Fig. 3 The loading wave form

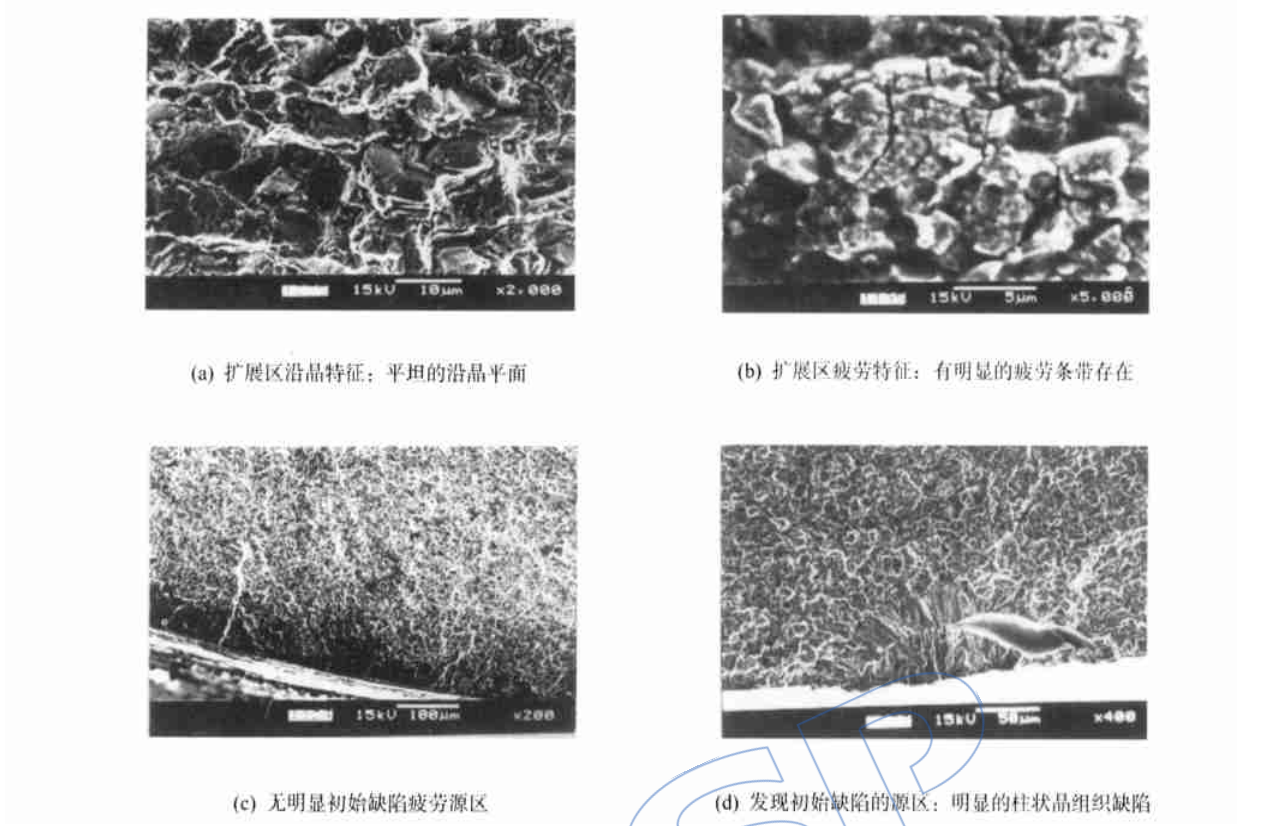


图4 试件断口分析情况

Fig. 4 Analysis of the fracture surface

表2 粉末冶金材料FGH95 疲劳试验结果和计算结果

Table 2 Result of Fatigue Test and Life Prediction

编号	$\sigma_{\max}$ / MPa	应力比	保持时间/s	温度 / °C	实验寿命 / 循环	计算结果(括号里为误差)		
						修改刚度法	有效应力法	一维计算
1	800	- 1	15	550	5892	8244(39.92%)	7414(25.83%)	8235
2			30		5701	5498(- 3.56%)	4562(- 19.98%)	5486
3		0.1	30		2098	2517(19.97%)	2212(5.67%)	2506
4	1000	- 1	15		375	342(- 16.99%)	267(- 31.19%)	338
5			30		284	224(- 21.13%)	193(- 32.04%)	220
6	1200	0.1	15		314	255(- 18.76%)	228(- 27.39%)	251
7	800	- 1	30		196	发现初始缺陷试件		

注: 本表中计算结果为 4.2 节无初始缺陷试件的计算

件(如图 2)进行了高温疲劳试验。试验在 CSS-280 型疲劳机上进行,采用高频炉进行局部加热,利用 TVS-2000 红外成像系统测控温度。按载荷谱(如图 3)进行了不同载荷大小、不同应力比、不同保持时间的疲劳试验。试验结果如表 2 所示,并对试件断口进行了电镜分析,发现:

(1) 扩展区内沿晶断裂的特征非常明显(如

图 4a),同时也分布有疲劳条带(图 4b)。同一载荷大小情况下,保持时间短的试件断口上疲劳条带多于保持时间较长的试件断口,这说明破坏是在疲劳和蠕变的共同作用下发生的,随着保持时间的增长,蠕变损伤的作用在增大。但对不同的载荷条件(应力水平,保持时间等),蠕变特征和疲劳特征在断口上的明显程度不同,这说明蠕变损伤和

疲劳损伤在总损伤中地位也不相同。

(2) 大部分试件断口源区都没有发现明显的缺陷,只是存在细微的表面加工刀痕(如图 4c)。

(3) 7 号试件的疲劳源处发现了疏松的柱状晶组织区,尺寸约为 $250\times100\text{ }\mu\text{m}$ (如图 4d),该试件的寿命(196 次)远低于相同载荷条件的 2 号试件的寿命(只有 2 号试件的 1/29),这说明该初始缺陷对寿命有非常大的影响,在寿命计算时必须考虑这一影响。

4.2 计算分析

根据试验情况,对是否存在初始缺陷的情况,分别采用前面建立的方法在 ANSYS 下进行了计算。

4.2.1 无初始缺陷试件的计算

对于没有发现初始缺陷的试件,危险部位(高温处)不会发生应力集中,因此可以按照一维计算。试件的有限元模型如图 5 所示。在计算时把单元的初始损伤均设为零,计算结果见表 2。试验和计算的对比表明,该方法具有较高的预测精度,修改刚度法的最大预测误差为 39.92%,有效应力法的最大预测误差为 32.04%。各载荷条件下二者的差别不大,这说明采用有效应力法进行简化计算是完全可行的。

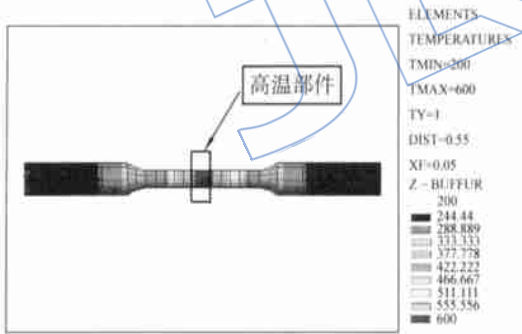


图 5 采用三维实体单元的有限元模型

Fig. 5 The FEM model

4.2.2 存在初始缺陷的试件的计算

发现缺陷的试件(图 4d),由于该缺陷的影响,试验寿命非常低,只有 196 个循环。根据文献[4]的研究结果:含夹杂等缺陷的材料疲劳过程,裂纹成核发生在最初几个循环里,而且发生在缺陷处。由于缺陷尺寸很小,形状也极不规则,采用有限元分析时要进行几何模型上的描述难于实现,而如果能够转化为初始损伤,则可以直接应用前面实现的方法进行计算。因此,对于初始缺陷的

影响,提出用单元的初始损伤进行模拟,并根据损伤变量的定义提出下面初始损伤确定方法。

设缺陷的尺寸(面积或体积)为 A' (如图 6),建立有限元模型后缺陷所在部位单元的尺寸(面积或体积)为 A ,且单元尺寸大于缺陷尺寸,则定义该单元的初始损伤为:

$$D_0 = \frac{A'}{A} \tag{12}$$

按照上述初始损伤处理方法,单元的初始损伤将与单元的尺寸有关,所以分别在不同的单元尺寸下进行了寿命预测计算(均采用有效应力法),计算结果如表 3 所示。

根据上述数据,绘出萌生寿命、扩展受命和总寿命与初始损伤(表征单元尺寸)的关系如图 7 所示。

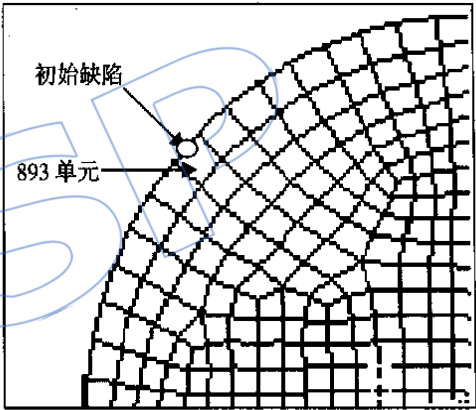


图 6 单元初始损伤确定示例
(单元尺寸 $589\times375\text{ }\mu\text{m}$)

Fig.6 Demonstration of specifying the initial damage

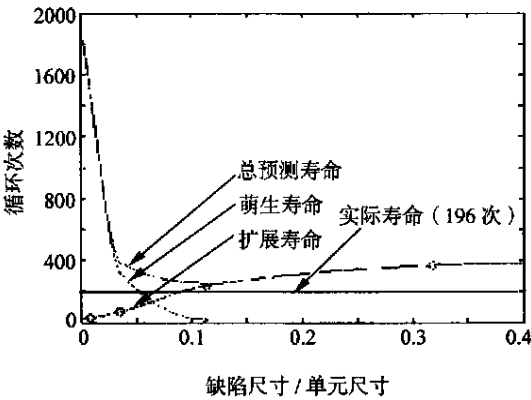


图 7 计算结果与单元尺寸的关系

Fig.7 Relation between predicted life and size of the element

从计算结果可以看出,对于含有初始缺陷的情况,采用单元的初始损伤模拟初始缺陷的影响进行寿命预测计算时,寿命预测的结果受单元尺寸的影响较大。在单元尺寸较大时,计算得到单元的初始损伤较小,预测寿命中萌生阶段占大部分,同时因为单元尺寸大,一旦发生第一个单元破坏,对应力场的影响很大,会造成周围其它单元的应力急剧上升(图 8),使得扩展阶段寿命很短;随着单元尺寸减小,预测寿命先是急剧下降,这主要是因为萌生寿命因单元初始损伤的增加而急剧下降;同时扩展寿命不断缓慢上升,这是因为单元较小,导致第一个单元破坏后引起的应力上升程度较小,从而其周围单元寿命增加;在单元尺寸小于缺陷尺寸的 10 倍后,单元的初始损伤非常大,萌生寿命已经非常短,总寿命将逐渐等于扩展寿命,随单元尺寸的进一步减小而缓慢变大。所以,按这种处理方法,并不是网格划分的越细,单元越小,预测结果越好,从图 7 可以看出,在单元尺寸为初始缺陷尺寸的 6 到 10 倍时,计算结果相对比较稳定,且与试验结果比较接近,寿命预测的误差较小。图 9 为计算得到的损伤分布,从中可以清楚的

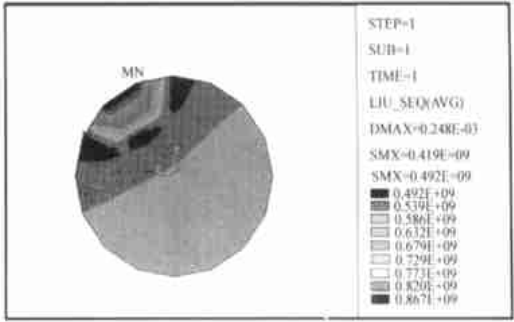


图 8 第一个单元破坏后截面上的应力 (Von Mises) 分布 (单元尺寸: $2356.2 \times 1200 \mu\text{m}$)

Fig. 8 The stress after the first element destroyed

看到损伤的发展过程。

本文提出的确定单元初始损伤的方法在一定条件下,能够得到较好的预测精度,但由于初始缺陷对破坏过程的影响是非常复杂的,所以对于存在初始缺陷情况下寿命预测的问题,本文中只能做初步的探讨,但这说明应用初始损伤模拟初始缺陷进行寿命预测是可行的,只要能够准确地确定含初始缺陷构件的初始损伤,就可以应用本文

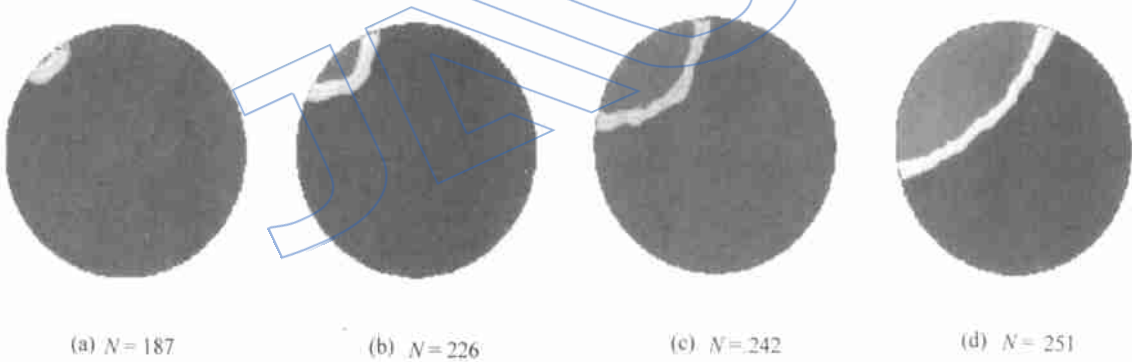


图 9 计算得到的损伤发展过程 (第 3 种单元尺寸时)

Fig. 9 Demonstration of the damage development

表 3 采用初始损伤模拟缺陷进行寿命预测的详细结果

Table 3 Result of Life Prediction With Initial Damage

序号	单元尺寸/ μm	缺陷尺寸/单元尺寸 (单元初始损伤)	寿命预测结果 (单位: 循环)			
			萌生寿命	扩展寿命	总寿命	误差/ %
1	2356.2×1200	0.008842	1472	26	1498	近 8 倍
2	942.5×750	0.035367	324	64	388	97.95
3	589×375	0.113166	16	235	251	28.06
4	314.16×250	0.31831	0	367	367	87.24

实现的方法进行较为准确的寿命预测。

5 结 论

基于损伤力学的寿命预测方法通过引入损伤变量,能够很好的处理疲劳-蠕变多种损伤相耦合的载荷形式,本文把这种方法引入到有限元计算中,用单元的损伤过程模拟构件的破坏过程,在 ANSYS 上实现了构件在蠕变-疲劳交互作用下寿命的预测。通过 FGH95 试件的高温疲劳试验对该方法进行了验证,结果证明该方法是完全可行的。

试验和计算表明,初始缺陷的存在对粉末合金件的寿命有非常大的影响,进行寿命预测时必须考虑这些初始缺陷的影响,这对于一些传统的寿命预测方法是比较困难的。本文用单元的初始损伤模拟存在的初始缺陷的影响,从而实现了考虑初始缺陷条件下的寿命预测,并取得了较好的结果。当然,如何将存在的初始缺陷转化为合适的单元的初始损伤,还需要进一步的探讨和研究。

参考文献:

- [1] Lemaitre J. 损伤力学教程[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [2] 张林. 高温构件疲劳断裂的损伤力学研究[R]. 北京: 北京航空航天大学, 1995.
- [3] Newman Keith E, Kosco John C. Fatigue Properties of High Performance Powdered Metal Components Advances in Powder Metallurgy and Particulate Materials [J]. Metal Powder Industries Federation, 1997, 2: 1343- 1351.
- [4] Lautridu J C, Guedou J Y, Honnorat Y. Effect of Inclusions on LCF Life of PM Superalloys for Turboengine Discs [R]. SNECMA-Material and Process Department- B. 81- 90
- [5] 李骋, 汪武祥, 杨治国等. FGH95 粉末涡轮盘常规力学性能的测试和研究[A]. 热等静压 FGH95 粉末涡轮盘研制与应用研究(鉴定文集)[C]. 北京: 北京航空材料研究院, 1997. 123- 128.
- [6] Lemaitre J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture[J]. Jengng, Mater, Tech, 1985, 107(1): 83 - 89.
- [7] 朱伯芳, 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.
- [8] 刘海笑, 王晖. 基于 ANSYS 软件平台的两例二次开发[A]. 2000ANSYS 中国用户年会论文集[C]. 北京: ANSYS 公司, 2000. 555- 557.